Ερωτήσεις Κατανόησης Ομοιόμορφη Συνέχεια, «Απειροστικός Λογισμός ΙΙ»

Δήμογλου Κωνσταντίνος

Στοιχειοθεσία Ερωτήσεων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Ερωτήματα

Να χαρακτηρίσετε ως αληθείς ή ψευδείς (με πλήρη αιτιολόγηση) τις παρακάτω προτάσεις.

(i) Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1]$. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,3]$

(ii) Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1]$. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$

(iii) Για μια παραγωγίσιμη και ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

(iv) Αν $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και g φραγμένη, τότε το γινόμενο $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(v) Αν $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένο όριο.

(vi) Αν $f\colon (0,3) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $x_n = 3 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν έχει όριο.

(vii) Αν μια συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $(0,+\infty)$ τότε μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(viii) Αν μια συνεχής συνάρτηση απεικονίζει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy τότε αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ix) Μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση μπορεί να είναι και συνεχής μόνο όταν το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα.

(x) Πηλίκο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(xi) Αν $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο (a,b) τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

(xii) Αν $f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$, τότε η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(1,+\infty)$.

(xiii) Αν $f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$, τότε η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty,0)$.

(xiv) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(xv) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $x \geq 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(xvi) Οι συναρτήσεις

(a) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, $x \in (0,1)$.

(b) $f(x) = \dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$, $x \in (0,\pi)$.

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x-1}$, $x \in (1,e)$.

(d) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$, $x \in (0,1)$.

είναι ομοιόμορφα συνεχείς.